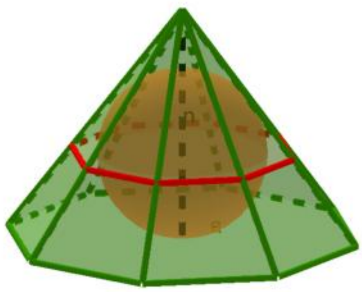
1. feladat

Egy művészeti konferencia résztvevőinek egy gömböt adtak ajándékba. A gömb egy szabályos nyolcszög alapú egyenes gúla alakú dobozban volt elhelyezve. A gömb akkora volt, hogy hozzáért a gúla minden lapjához. A gúla alapéleinek hossza 14 cm, a gúla magassága 24 cm volt. (A gúla vastagsága elhanyagolható.)

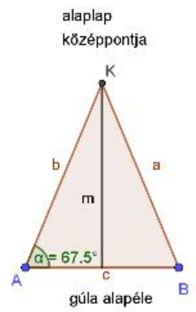


A gúla és a gömb közötti részt kitöltötték habszivaccsal a gúla aljától a gömb középpontjának magasságáig.

a) Mekkora a gömb sugara?
b) Mekkora a doboz belsejében lévő habszivacs térfogata?
c) A gúla minden lapja más színű volt, a színeket 9 adott színből választották ki. Hányféleképpen színezhetők ki a gúla lapjai, ha a forgatással egymásba vihető színezéseket nem tekintjük különbözőnek?

1. feladat megoldása:

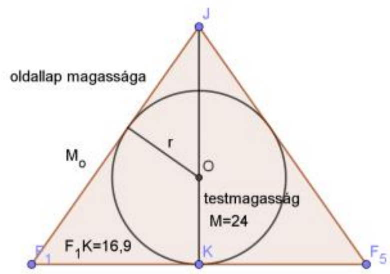
a) A gömb a gúlát az oldalapjainak magasságvonalain illetve a gúla alapjának középpontjában érinti. Vágjuk félbe a gúlát egy olyan síkkal, amely átmegy a gúla két szemközti oldallapjának magasságvonalán. Ez a sík az alaplap nyolcszögét is félbe vágja úgy, hogy a vágásvonal átmegy a nyolcszög két szemközti oldalának felezőpontján.



Először határozzuk meg a nyolcszög két szemközti oldalfelező pontjának távolságát. Ehhez vágjuk fel a nyolcszöget 8 darab egybevágó egyenlőszárú háromszögre. A háromszögek egyik csúcsa a nyolcszög középpontja, a másik két csúcs a nyolcszög két szomszédos csúcsa legyen. Egy ilyen háromszögnek az alapja 14 cm, az alapon lévő szögei 67,5°-osak. A háromszög magasságát kell kiszámolnunk:

$$tg\,67{,}5° = \frac{m}{7} \quad \Rightarrow \quad m \approx 16{,}9 \text{ cm}.$$

Ebből a gúla szemközti oldalfelező pontjainak távolsága $2 \cdot m = 33{,}8\,cm$.



A gúla oldallapjainak magasságvonalán átmenő síkmetszet egy olyan háromszög, amelynek alapja 33,8 cm, magassága pedig megegyezik a gúla magasságával, ami 24 cm. A sík a gömböt is félbevágja, így a metszettel a gömb egy főkörét kapjuk. Ez a kör érinti a metszetháromszög oldalait. A beírható kör sugara meghatározható a háromszög oldalainak hosszából és a háromszög területéből.

Az oldallap magasságát Pitagorasz tételével is kiszámolhatjuk.

$$M_o = \sqrt{16{,}9^2 + 24^2} = 29{,}35 \text{ cm}$$

A háromszög területe:

$$T_{metszet} = \frac{33{,}8 \cdot 24}{2} = 405{,}6\,cm^2$$

Az összefüggés a háromszög beírható körének sugara, a háromszög oldalai és területe között:

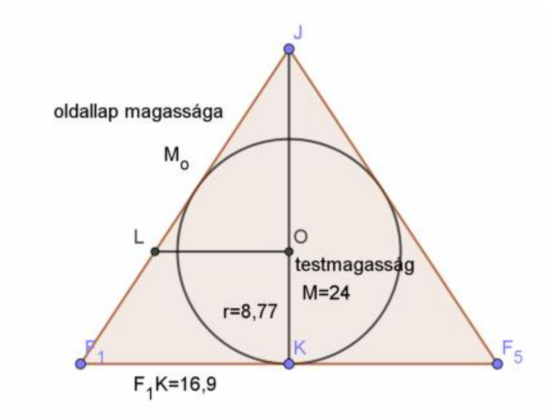
$$T_\Delta = \frac{(a+b+c)}{2} \cdot r$$

A metszetháromszög oldalainak hossza 33,8 cm, 29,35 cm és 29,35 cm. Ebből a beírható kör sugara: $r = 8{,}77cm.$

b) A habszivacs térfogata megegyezik egy csonka gúla és egy félgömb térfogatának különbségével.
A csonka gúla térfogatához ismerni kell a csonka gúla magasságát (ez a gömb sugara), az alaplap területét, és annak a nyolcszögnek a területét, amely a gömb középpontjának magasságában keletkezik, ha az alaplappal párhuzamos síkkal elvágjuk a gúlát.
Az alaplap területének kiszámításánál használjuk fel, hogy a 8 darab egybevágó részháromszög alapja és magassága ismert. Ebből tehát az alaplap területe:

$$T_{alaplap} = 8 \cdot \frac{14 \cdot 16{,}9}{2} = 946{,}4\ cm^2$$

A csonka gúla fedőlapja is szabályos nyolcszög. Mivel hasonló az alaplaphoz, ezért a fedőlap területének meghatározásához elegendő a hasonlóság arányát meghatározni. A hasonlóság arányát megkapjuk, ha megadjuk a nyolcszögek középpontjának az oldalfelező pontoktól való távolságát. Nézzük ismét a gúlának azt a síkmetszetét, amelyik a szemközti oldallapok magasságát tartalmazza. Az ábra alapján a JLO háromszög hasonló a JF_1K háromszöghöz.



A hasonlóság arányát a háromszögek magassága alapján írhatjuk fel:

$$a = \frac{M - r}{M} = \frac{24 - 8{,}77}{24} \approx 0{,}635$$

Tehát a nyolcszögű fedőlap és alaplap hasonlóságának aránya 0,635.
A nyolcszögek területének aránya megegyezik a hasonlóság arányának a négyzetével.
Ebből a fedőlap területe:

$$T_{fedőedő} = T_{alaplap} \cdot a^2 = 946{,}4 \cdot 0{,}635^2 = 381{,}6\ cm^2$$

Ebből a csonka gúla térfogata:

$$V_{csg} = \frac{8{,}77}{3} \cdot (946{,}4 + \sqrt{946{,}4 \cdot 381{,}6} + 381{,}6) = 5639 cm^3$$

A félgömb térfogata:

$$V_{fg} = \frac{4\text{®}r^3}{6} = \frac{4\text{®} \cdot 8{,}77^3}{6} = 1412{,}7\ cm^3$$

Tehát a habszivacs térfogata:

$$V_{hsz} = 5639 - 1412{,}7 = 4226{,}3\ cm^3$$

c) A gúla alapjának színét 9 féleképpen választhatjuk meg. A maradék 8 színből színezzük az oldallapokat. Az egyik oldallap színét rögzítjük, és vizsgáljuk, hogy hozzá képest hányféleképpen színezhető a többi lap. A többi lap színének sorrendje a maradék 7 színnek tetszőleges sorrendje lehet. Ezért a fedőlapok színezésére $7! = 5040$ színezési lehetőség van (ha az egymással forgatással fedésbe hozható eseteket nem tekintjük különbözőnek).
Mivel az alaplapot bármilyen színűnek is választjuk, a fedőlapokra 7! színezési lehetőség van, ezért a gúla színezésére $9 \cdot 7! = 45360$ színezési lehetőség van.