2. feladat

Egy park létrehozásánál a park belsejében egy kör alakú füves területet terveztek. A kör egyenlete a tervrajzon lévő koordinátarendszerben $x^2+12x+y^2-108=0$. A park B(14; 0) bejáratától a körhöz érintőket húztak, az érintőszakaszok sétautak lesznek. Az érintőszakaszok és a kör által bezárt területre virágokat terveznek ültetni. Ami a tervrajzon 1 egység, az a valóságban 5 m.

a) Mely pontokban érintik a sétautak a kört a térképen?
b) Mekkora szöget zárnak be egymással a sétautak?
c) Mekkora a virágos rész területe a valóságban?
d) Írja fel a sétautakon átmenő egyenes egyenletét (a térkép szerint)!

2. feladat megoldása:

a) Teljes négyzetté alakítással írjuk fel a kör egyenletét:

$(x+6)^2+y^2=144$

Ebből a kör középpontjának koordinátái és a kör sugara: $K(-6;0)$ és $r=12$.

Mivel a sétautak érintik a kört, azért az érintési pontokba vezető sugarak merőlegesek a sétautakra. Az érintési pontok rajta vannak a K és B pontokra, mint átmérőre rajzolt Thalesz körön.

A Thalesz kör középpontja a KB szakasz felező pontja: $K_T(4;0)$.

A Thalesz kör sugara: $r_T=10$.

A Thalesz kör egyenlete: $(x-4)^2+y^2=100$.

Az érintési pontokat a feladatban megadott kör és a Thalesz kör metszéspontja adja. A metszéspont x és y koordinátáját az alábbi egyenletrendszerből határozhatjuk meg:

$$\left.\begin{aligned}(x+6)^2+y^2&=144\\(x-4)^2+y^2&=100\end{aligned}\right\}$$

Kiesik az y változó, ha az egyenleteket kivonjuk egymásból:

$(x+6)^2-(x-4)^2=144-100$

$x^2+12x+36-x^2+8x-16=44$

$20x=24$

$x=1{,}2$

Helyettesítsük x értékét a Thalesz kör egyenletébe:

$(1{,}2-4)^2+y^2=100$

$y^2=92{,}16$

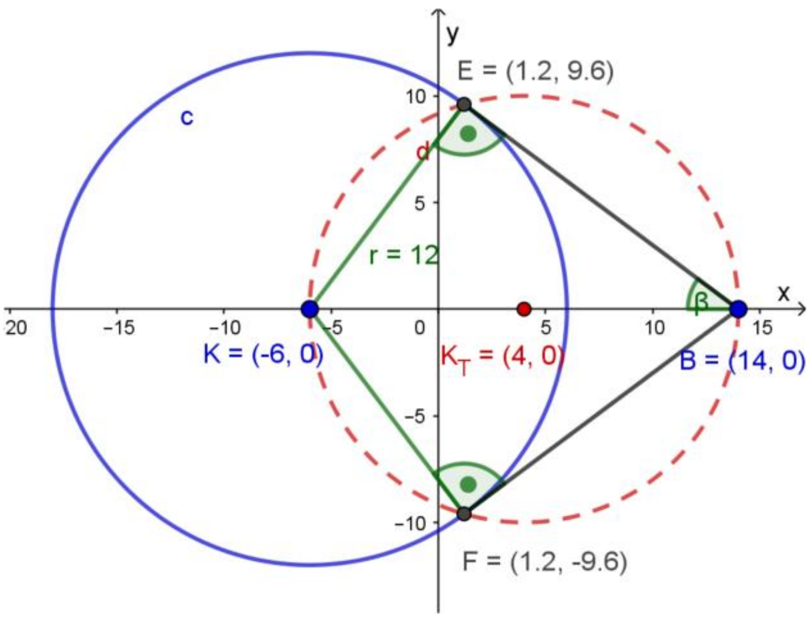
$y=\pm 9{,}6$

Tehát az érintési pontok koordinátái: E(1,2; 9,6) és F(1,2; -9,6).

b) Az alábbi ábra szimmetrikus az x tengelyre, ezért elég a KBE szöget ( ) meghatározni. Mivel a KBE háromszög derékszögű, továbbá a $KB=20$ egység és $KE=12$ egység, ezért:

$\sin \quad = \frac{12}{20}$ és $\quad \approx 36{,}87°$

Tehát a sétautak által bezárt szög 73,74°.



c) A virágos rész területét megkapjuk, ha a KFBE deltoid területéből kivonjuk a KEF körcikk területét.
Vegyük figyelembe, hogy ami a térképen egy egység, az a valóságban 5 méter. A deltoid átlói a térképen 20 egység és 19,2 egység, ezért a deltoid átlóinak hossza a valóságban 100 m és 96 m. Ebből a deltoid területe:

$$T_d = \frac{100 \cdot 96}{2} = 4800\, m^2$$

A körcikk középponti szögét a KFBE deltoid szögei alapján kaphatjuk meg. Mivel a négyszög szögeinek összege 360°, és a deltoid három szöge ismert (73,74°, 90°, 90°), ezért a K csúcsnál lévő szög 106,26°. A körcikk sugara 12 egység, azaz 60 méter. Ebből a körcikk területe:

$$T_{KC} = \frac{60^2 \cdot ® \cdot 106{,}26}{360} = 3338{,}3\, m^2$$

A virágos rész területe: $T_V = 4800 - 3338{,}3 = 1461{,}7\, m^2$.

d) B és E pontokon átmenő egyenes egyenlete:

Az egyenes irányvektora: $\overrightarrow{BE} = \underline{v} = (-12{,}8; 9{,}6)$

Az egyenes normálvektora $\underline{n} = (9{,}6; 12{,}8)$

Az egyenes normálvektoros egyenlete: $9{,}6x + 12{,}8y = 134{,}4$

B és F pontokon átmenő egyenes egyenlete:

Az egyenes irányvektora: $\overrightarrow{BF} = \underline{v} = (-12{,}8; -9{,}6)$

Az egyenes normálvektora $\underline{n} = (9{,}6; -12{,}8)$

Az egyenes normálvektoros egyenlete: $9{,}6x - 12{,}8y = 134{,}4$