

**4. feladat**

Egy iskola 12. évfolyamának A, B, C, D, E, F osztályai között labdarugó bajnokságot rendeztek. A gy zelemért 2 pont, a döntetlenért egy pont járt. Minden osztály minden másik osztállyal pontosan egyszer játszik. A csapatok által elért pontokat az alábbi táblázat mutatja:

Osztályok	A	B	C	D	E	F
Szerzett pontszám	6	2	7	6	7	

Tudjuk továbbá, hogy az E és D osztályok legy zték az A osztály csapatát; az F osztály csapata legy zte a B osztályt, és összesen 4 mérk zés végz dött döntetlenre.

- Hány pontot szerzett az F osztály csapata?
- Hogyan végz dött a C és E osztályok közötti mérk zés?
- Az iskolának csak egy pályája van, ezért a mérk zéseket egymás után játszották le. Bizonyítsa be, hogy bármely mérk zés után biztosan volt két olyan csapat, amelyek ugyanannyi mérk zést játszottak le addig!
- Anna összesen 7 mérk zést nézett meg. Mennyi a valószínű sége, hogy ezek között kevesebb olyan mérk zés volt, amely döntetlenre végz dött, mint amelyeknél nem döntetlen volt a végeredmény?

**4. feladat megoldása:**

- a) A bajnokságon lejátszott mérk zések száma:  $\frac{6 \cdot 5}{2} = 15$

Minden mérk zésen 2 pontot osztottak ki a csapatoknak, így összesen 30 pontot kaptak a csapatok. Ezért az F osztálynak 2 pontja volt a bajnokság végén.

A csapatok által elért pontok:

Osztályok	A	B	C	D	E	F
Szerzett pontszám	6	2	7	6	7	2

- b) Mivel az A osztályt legy zte az E és D osztály, azért az A osztály csak úgy szerezhett 6 pontot, ha legy zte a B, C és F osztályt. Tudjuk továbbá, hogy az F osztály a 2 pontját a B osztály legy zésével szerezte, tehát az F osztály minden más osztálytól kikapott. Mivel az A és F osztály által lejátszott összes mérk zés eredménye ismert, ezért elég a továbbiakban csak a másik 4 osztály közti mérk zések eredményét vizsgálni. Az alábbi táblázat azt mutatja, hogy a másik 4 osztály között zajlott mérk zésekb l hány pontot szereztek (levontuk tehát az A és F csapat legy zéséb l származó pontjaikat)!

Osztályok	B	C	D	E
Szerzett pontszám	2	5	2	3

A C osztály csak úgy szerezhett 5 pontot 3 mérk zésb l, ha kétszer gy zött, és egyszer döntetlent játszott. Ismert továbbá, hogy összesen 4 döntetlent játszottak a csapatok, így a hiányzó három döntetlen mérk zés mindegyike a B, D és E osztályok egymás közötti mérk zéseib l származtak. Így a B csapat 2 pontja a D és E csapatokkal játszott döntetlenb l származik. Hasonlóan a D csapat 2 pontja a B és E csapatokkal játszott döntetlen eredményb l fakad. Az E csapat 2 pontot szerzett a B és D csapatokkal játszott döntetlenb l, és így a maradék 1 pontját a C csapattal játszott döntetlenb l kellett megszereznie.

**Tehát az E és C csapatok közötti mérk zés eredménye döntetlen.**

c) A bizonyítást két részre osztjuk.

1. eset: Ha egyik csapat sem játszotta le az összes mérkőzését, akkor a csapatok által lejátszott mérkőzések lehetséges száma: 0, 1, 2, 3, 4. Mivel 6 csapat van, de csak 5 lehetőség a lejátszott mérkőzések számát tekintve, ezért biztosan van két olyan csapat, amelyik azonos számú mérkőzésen van már túl.

2. eset: Ha van olyan csapat, amelyik minden mérkőzését lejátszotta, akkor a csapatok által lejátszott mérkőzések lehetséges száma: 1, 2, 3, 4, 5. Mivel 6 csapat van, de csak 5 lehetőség a lejátszott mérkőzések számát tekintve, ezért biztosan van két olyan csapat, amelyik azonos számú mérkőzésen van már túl.

d) A 7 mérkőzés között akkor lehet kevesebb a döntetlenre végződés, ha a döntetlenek száma 0, 1, 2 vagy 3. Mivel összesen 4 mérkőzés végződött döntetlenre, ezért egyszerűbb a kérdéses esemény komplementerének valószínűségét meghatározni.

Tehát annak a valószínűsége, hogy pontosan 4 döntetlen volt a megnevezett 7 mérkőzés között:

$$P = \frac{\binom{4}{4} \cdot \binom{11}{3}}{\binom{15}{7}} = \frac{1 \cdot 165}{6435} = \frac{1}{39} \approx 0,0256$$

Tehát a kérdéses esemény valószínűsége:  $\frac{38}{39} \approx 0,9744$ .