6. feladat

Egy konferencia 30 résztvevőjének mindegyike kapott egy belépő kódot, 101-130 –ig terjedő egész számok közül.

a) Véletlenül kiderült, hogy a konferencián azok ismerték előzetesen egymást, akik kódjának összege vagy különbsége osztható volt 3-mal. Hány ismeretség volt a résztvevők között?
b) Válasszunk ki a résztvevők közül kettőt véletlenszerűen. Mennyi a valószínűsége, hogy ismerték egymást előzetesen?
c) A 30 ember egy nagy kör alakú asztalnál foglalt helyet a konferencia teremben. Hányféleképpen lehet őket leültetni úgy, hogy bármely három egymás mellett ülő kódjának összege osztható legyen hárommal? (A forgatással egymásba vihető eseteken nem tekintjük különbözőnek.)

6. feladat megoldása

a) A kódok egymást követő egész számok voltak, ezért közöttük 10 darab olyan volt, amelyik osztható volt 3-mal. 10 darab olyan volt, amelyik 3-mal osztva 1-et adott maradékul. És szintén 10 darab volt azokból, amelyik 3-mal osztva 2-t adtak maradékul.
Két szám különbsége, akkor osztható 3-mal, ha mind a két szám azonos maradékot ad 3-mal osztva.
Két szám összege akkor osztható 3-mal, ha vagy mind a kettő osztható 3-mal, vagy az egyik 1 a másik 2 maradékot ad hárommal osztva.
Tehát azon 10 ember ismerte egymást korábban, akiknek a kódja 3-mal osztható volt, illetve a másik 20 ember ismerte még egymást korábbról. (Akkor nem állt fenn ismeretség két tag között, ha az egyiknek osztható volt 3-mal a kódja, a másiknak pedig nem.)
Ismert, hogy n ember között az összes ismeretség száma $\frac{n\cdot(n-1)}{2}$, ezért a konferencia résztvevői között az összes ismeretség száma:

$$\frac{10\cdot 9}{2}+\frac{20\cdot 19}{2}=235$$

b) Az összes esetet megkapjuk, ha megadjuk, hogy 30 emberből 2 embert hányféleképpen lehet kiválasztani (sorrend nem számít): $\binom{30}{2}=435$.
A kedvező esetek számát az a) feladatban meghatároztuk, ezért a kérdezett valószínűség:

$$P=\frac{235}{435}\approx 0{,}5402$$

c) Három szám összege akkor osztható 3-mal, ha vagy mind a három azonos maradékot ad 3-mal osztva, vagy mind a három különböző maradékot ad hárommal osztva.
Ha egymás mellé ültetjük a 10-10 embert, akinek azonos maradékot ad a kódja, akkor nem lesz 3-mal osztható a kódok összege azoknál, ahol szomszédságba kerülnek a nem azonos maradékot adók (például az utolsó embert, akinek még 3-mal osztható a kódja két olyan ember követ a sorban, akiknek 3-mal osztva 1 maradékot ad a kódjuk).
Tehát csak olyan leültetés lehetséges, ahol a három szomszédos embernek három különböző maradékot ad a kódja 3-mal osztva.
Tehát balról jobbra nézve a kódok maradékának sorrendjét, és 2 maradékkal kezdve:
I. eset: 2,1, 0, 2, 1, 0, 2, 1, 0 …
II. eset: 2, 0, 1, 2, 0, 1, 2, 0, 1, ….

Készítette: Szabó Ilona
Németh Katalin

Látható, hogy az azonos maradékot adók mindkét esetben minden harmadik helyet foglalják el.
Tekintsük rögzítettnek azon résztvevő helyét, aki a 101-es kódot kapta (3-mal osztva 2 maradék). Hozzá képest a szintén 2 maradékot adók 9 helyre ülhetnek tetszőleges sorrendben, ezért erre 9! lehetőség van.
Az I. és II. esetben is 10 kijelölt helyre ülhetnek azok, akiknek 3-mal osztható a kódjuk (10! lehetőség), és szintén 10 kijelölt helyre ülhetnek azok, akiknek 3-mal osztva 1 maradékú a kódjuk (10! lehetőség).
A lehetséges leültetések száma tehát: $2 \cdot 9! \cdot 10! \cdot 10!$.