7. feladat

Adott az f függvény: $f:[-5;7] \mapsto \mathbb{R}$, $f(x)=-2x^3+54x$.

a) Határozza meg az $f(x)$ függvény zérushelyeit!
b) Vizsgálja meg a függvényt monotonitás és helyi szélsőérték szempontjából! Adja meg a szélsőértékek jellegét és a hozzá tartozó függvényértékeket is!
c) Adja meg a függvény értékkészletét!
d) Oldja meg az egyenlőtlenséget a valós számok halmazán: $-2x^3+54x \geq 0$!
e) Határozza meg a c értékét úgy, hogy az x tengely $[0;c]$ szakasza, az $x=c$ egyenletű egyenes és az f grafikonja által közbezárt síkidom területe 100 területegység legyen (c értéke egy pozitív valós szám)!

7. feladat megoldása

a) Alakítsuk szorzattá a függvényt:

$$-2x^3+54x=(-2x)\cdot(x^2-27)=(-2x)\cdot(x-\sqrt{27})\cdot(x+\sqrt{27})$$

Ebből a függvény zérushelyei:

$x_1=0;\ x_2=\sqrt{27}$ (A $-\sqrt{27}$ azért nem zérushelye a függvénynek, mert nem esik bele a függvény értelmezési tartományába.)

b) A függvény deriváltja: $f'(x)=-6x^2+54$

A függvény deriváltjának zérushelyei: $x_1=-3;\ x_2=3$

Készítsük el a deriváltfüggvény előjel tábláját. Vegyük figyelembe, hogy a deriváltfüggvény egy konkáv parabola.

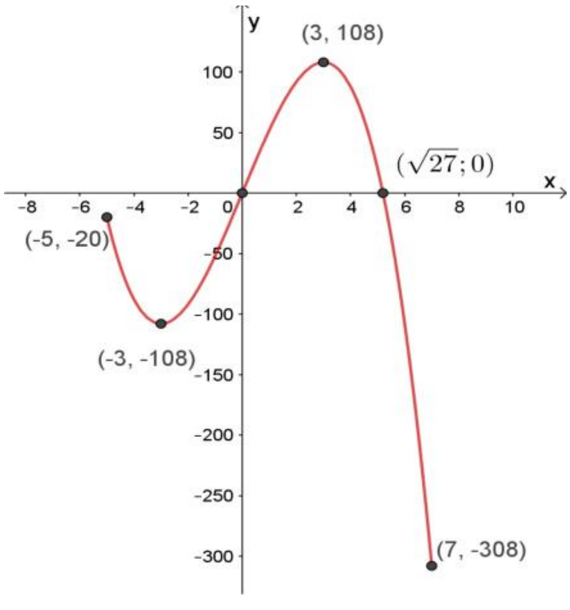
	$-5<x<-3$	$x=-3$	$-3<x<-3$	$x=3$	$3<x<7$
$f'(x)$	-	0	+	0	-
$f(x)$	szig. mon. csökken	helyi minimum $f(-3)=-108$	szig. mon. nő	helyi maximum $f(3)=108$	szig mon. csökken

c) A függvény értékkészletének megadásánál ismernünk kell az értelmezési tartomány intervallumának végpontjaiban is a függvényértékeket.

$f(-5)=-20$ és $f(7)=-308$.

Mivel a polinom függvények folytonosak, ezért megállapíthatjuk, hogy az értelmezési tartományban a legnagyobb függvényérték 108 és a legkisebb függvényérték -308. A folytonosság miatt e között a két érték között minden függvényérték előfordul.

Tehát az értékkészlet: $[-308;\ 108]$



d) $-2x^3+54x \geq 0$

A függvény folytonossága, a zérushelyek és a monotonitás ismeretében vázolható a függvény grafikonja (a valós számok halmazán).

A grafikon alapján az egyenlőtlenség megoldása:

$$x\epsilon\ ]-\infty;\ -\sqrt{27}]\ \cup\ [0;\ \sqrt{27}]$$

e) A függvényt integrálni kell a $[0;\ c]$ intervallumon:

$$\int_0^c \left(-2x^3+54x\right)dx=\left[\frac{-2\cdot x^4}{4}+27x^2\right]_0^c=\frac{-c^4}{2}+27c^2-0$$

A c azon értékét keressük, amelyre a határozott integrál értéke 100.

$$\frac{-c^4}{2}+27c^2=100$$

Rendezzük 0-ra az egyenletet:

$$c^4-54c^2+200=0$$

Az egyenlet másodfokú, ha a c^2-t tekintjük az egyenlet változójának.
A másodfokú egyenlet megoldása a megoldó képlettel:

$(c_1)^2=4$ és $(c_2)^2=50$

Mivel c értéke pozitív, ezért a lehetséges megoldások:

$c_1=2$ és $c_2=\sqrt{50}$

A $c_2=\sqrt{50}$ már nem része az értelmezési tartománynak, ezért biztosan nem megoldása a feladatnak.
Tehát az f függvény integrálását a $[0;\ 2]$ intervallumon kell elvégezni ahhoz, hogy a függvény és az x tengely által bezárt terület 100 területegység legyen.