10. feladat

Egy autópályához két, párhuzamosan futó alagutat fúrnak. Az első alagút esetében az első nap 20 métert fúrtak, majd a 2. naptól kezdve minden nap az előző napi hossznak csak a 95 %-át tudták kifúrni az egyre keményebb kőzet miatt.
A második alagutat 10 nappal később kezdték fúrni. Itt az első fúrási napon 10 métert haladtak előre, majd minden további napon a 96 %-át teljesítették az előző napi fúrás hosszának.

a) Hány méter hosszú volt az első alagút a 10. nap végén?
b) Hányadik napon érte el az első alagút a 350 méteres hosszúságot?
c) Hányadik munkanaptól kezdve fúrtak **naponta** hosszabb járatot a második alagútnál, mint az elsőnél? (A napok számolását az első alagút fúrásának kezdetétől mérjük!)
d) Bizonyítsuk be, hogy az első alagút hossza nem érheti el a 450 métert!

10. feladat megoldása

a) Az egyes napokon kifúrt hosszúságok mértani sorozatot alkotnak, ahol $a_1 = 20$ és $q = 0{,}95$. Az első 10 napi fúrások teljes hosszúságát a mértani sorozat első 10 elemének összege adja meg:

$$S_{10} = 20 \cdot \frac{0{,}95^{10} - 1}{0{,}95 - 1} \approx 160{,}5\,(\mathrm{m})$$

b) Az első n nap által kifúrt hosszúságok összegének kell legalább 350 m-nek lenni:

$$S_n \geq 350 \quad \Rightarrow \quad 20 \cdot \frac{0{,}95^n - 1}{0{,}95 - 1} \geq 350$$

Osszuk el az egyenlőtlenség mindkét oldalát 20-szal, illetve szorozzuk meg 0,05-dal:

$$1 - 0{,}95^n \geq 0{,}875$$

Vonjunk ki az egyenlet mindkét oldalából 0,875-ot, illetve adjunk hozzá $0{,}95^n$-t.

$$0{,}125 \geq 0{,}95^n$$

Vegyük minkét oldalnak a tízes alapú logaritmusát. Mivel a 10-es alapú logaritmus függvény szigorúan monoton növekvő, ezért a reláció iránya nem változik meg.

$$\lg 0{,}125 \geq n \cdot \lg 0{,}95$$

Osszuk el az egyenlőtlenség mindkét oldalát lg0,95-dal. Mivel a lg0,95 értéke negatív, ezért a reláció iránya megváltozik.

$$\frac{\lg 0{,}125}{\lg 0{,}95} \leq n \quad \Rightarrow n \geq 40{,}54$$

Tehát az első alagút hossza a 41. napon érte el a 350 méteres hosszúságot.

c) Az n. napon fúrt hosszúság az első alagút esetén: $a_n = 20 \cdot 0{,}95^n$
A második alagutat 10 nappal rövidebb ideig fúrták, azért ennél az alagútnál az n. napon fúrt mennyiség: $b_n = 10 \cdot 0{,}96^{n-10}$
Azt keressük, hogy n mely értéke esetén lesz $b_n > a_n$.

$$10 \cdot 0{,}96^{n-10} > 20 \cdot 0{,}95^n$$

Alkalmazzuk a kitevők különbségére a hatványozás azonosságát.

$$10 \cdot \frac{0{,}96^n}{0{,}96^{10}} > 20 \cdot 0{,}95^n$$

$$0{,}96^n > 2 \cdot 0{,}96^{10} \cdot 0{,}95^n$$

Osszuk el az egyenlet mindkét oldalát $0{,}95^n$-nel. Mivel a pozitív alapú hatványok értéke bármely kitevő esetén pozitív, ezért a reláció iránya nem változik meg a rendezés során.

$$\frac{0{,}96^n}{0{,}95^n} > 2 \cdot 0{,}96^{10}$$

$$\left(\frac{0{,}96}{0{,}95}\right)^n > 2 \cdot 0{,}96^{10}$$

Vegyük minkét oldalnak a tízes alapú logaritmusát. Mivel a 10-es alapú logaritmus függvény szigorúan monoton növekvő, ezért a reláció iránya nem változik meg.

$$n \cdot \lg\left(\frac{0{,}96}{0{,}95}\right) > \lg\left(2 \cdot 0{,}96^{10}\right)$$

Osszuk el az egyenlőtlenség mindkét oldalát $\lg\left(\frac{0{,}96}{0{,}95}\right)$-dal. A reláció irány nem változik meg, mert pozitív számmal osztunk.

$$n > 27{,}2$$

Tehát a 28. munkanaptól a második alagút esetében a napi fúrások hossza nagyobb lesz, mint az első alagút napi fúrásainak hossza.

d) Vizsgáljuk meg az első alagút esetén, hogy mely értékhez tart a fúrás teljes hossza, ha a munkanapok száma tart a végtelenhez:

$$\lim_{n\to\infty} 20 \cdot \frac{0{,}95^n - 1}{0{,}95 - 1} = 20 \cdot \frac{-1}{0{,}95 - 1} = 400$$

(A határérték számolás során felhasználtuk, hogy a $\lim_{n\to\infty}\left(0{,}95^n\right) = 0$)

Tehát az első alagút hossza tart a 400 m-hez, de nem érheti el azt, ezért a 450 métert sem érheti el.