13. feladat

Egy matematika versenyen 100 tanuló vett részt és 3 feladatot kellett megoldani. Minden versenyző megoldott legalább egy feladatot. Az eredményekről az alábbi információk ismertek még.

I. Az első feladatot megoldók száma, a második feladatot megoldók száma és a 3. feladatot megoldók száma ebben a sorrendben egy olyan növekvő számtani sorozat egymást követő elemei, amelyeknek a különbsége 8.

II. Egy növekvő számtani sorozat egymást követő három elemét adják az alábbi számok is a megadott sorrendben: csak az 1. és 2. feladatot megoldók száma, csak a 1. és 3. feladatot megoldók száma, illetve csak a 2. és 3. feladatot megoldók száma.

III. Ismert továbbá, hogy legalább két feladatot 40 tanuló oldott meg. Mind a három feladatot megoldók száma harmada volt a pontosan 2 feladatot megoldók számának.

a) Mennyi a versenyzők által megoldott feladatok számának átlaga?
b) Hányan oldották meg csak a 2. feladatot?
c) Bizonyítsa be, hogy csak az 1. feladatot megoldók száma, csak a 2. feladatot megoldók száma, csak a 3. feladatot megoldók száma is ebben a sorrendben számtani sorozatot alkot!

13. feladat megoldása

a) Mivel 2 vagy 3 feladatot összesen 40 tanuló oldott meg, és a pontosan 2 feladatot megoldók 3-szor annyian voltak, mint a pontosan 3 feladatot megoldók, ezért 30-an oldottak meg pontosan 2 feladatot; és 10-en oldottak meg pontosan 3 feladatot.
Mivel a versenyen 100-an vettek rész, ezért 60-an oldottak meg pontosan egy feladatot.

megoldott feladatok száma	1	2	3
versenyzők száma	60	30	10

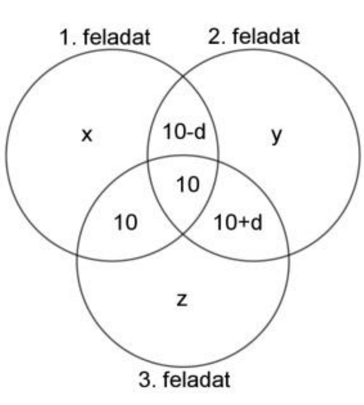
A megoldott feladatok számának átlaga:

$$\bar{x} = \frac{60\cdot 1 + 30\cdot 2 + 10\cdot 3}{100} = \frac{150}{100} = 1{,}5$$

b) Tudjuk, hogy pontosan 2 feladatot 30-an oldottak meg. Használjuk fel a II. információt. Az ott szereplő három szám összege 30. A számok számtani sorozatot alkotnak. A számtani sorozat három egymást követő elemének átlaga megegyezik a középső elemmel:

$$\frac{a_1 + a_2 + a_3}{3} = a_2 \quad \Rightarrow \quad a_2 = \frac{30}{3} = 10$$

Tehát a csak a 1. és 3. feladatot megoldók száma 10.



Foglaljuk halmazábrába az eddig megtudtakat.
A halmazábra alapján
- az 1. feladatot megoldók száma: $b_1 = x - d + 30$
- a 2. feladatot megoldók száma: $b_2 = y + 30$
- a 3. feladatot megoldók száma: $b_3 = z + d + 30$

Az I. információ alapján ezek a számok egy olyan számtani sorozat egymást követő elemei, amelyeknél a különbség 8.

$$b_2 = b_1 + 8 \;\Rightarrow\; y + 30 = x - d + 38 \;\Rightarrow\; y = x - d + 8$$

$$b_3 = b_1 + 16 \;\Rightarrow\; z + d + 30 = x - d + 46 \;\Rightarrow\; z = x - 2d + 16$$

Ismert továbbá, hogy a pontosan egy feladatot megoldók száma 60, azaz $x+y+z=60$.
Fejezzük ki y-t és z-t x-szel és d-vel:
$x+x-d+8+x-2d+16=60$
$3x-3d=36$
Osszuk el 3-mal az egyenlet mindkét oldalát:
$x-d=12$
Mivel $y=x-d+8$ és $x-d=12$, ezért $y=20$.
Tehát csak a 2. feladatot 20-an oldották meg.

c) Bizonyítani kell, hogy x, y és z is egy számtani sorozat egymást követő elemei.
A b) feladat alapján ismert, hogy $y=20$ és $x-d=12$. Ebből következik, hogy

- $x=12+d$,
- a 2. feladatot megoldók száma: $b_2=y+30=20+30=50$,
- mivel az egyes feladatokat megoldók száma egy számtani sorozat egymást követő elemei, amelyeknek a különbsége 8, ezért a 3. feladatot 58-an oldották meg,
- a 3. feladatot megoldók száma: $b_3=z+d+30=58 \Rightarrow z=28-d$.

Azt kell tehát bizonyítani, hogy $x=d+12$; $y=20$ és $z=28-d$ egy számtani sorozat egymást követő elemei.
Ehhez elég belátni, hogy a középső elem a másik két elemnek a számtani átlaga:

$$\frac{x+z}{2}=\frac{d+12+28-d}{2}=20$$

Ezzel az állítást igazoltuk.