14. feladat

a) Oldja meg a valós számok halmazán az alábbi egyenletet!

$$2-\sqrt{x-10}=\lg x+\frac{1}{\lg x}$$

b) Határozza meg x azon egész értékeit, amelyre az alábbi kifejezés helyettesítési értéke is egész szám!

$$\frac{x^3-16x}{x^3-6x^2+8x}$$

14. feladat megoldása

a) Vizsgáljuk meg először az egyenletben szereplő kifejezések értelmezési tartományát!

A $\sqrt{x-10}$ akkor értelmezhető, ha $x\geq 10$.

A $\lg x$ akkor értelmezhető, ha $x>0$.

Az $\frac{1}{\lg x}$ akkor értelmezhető, ha $x>0$ *és* $x\neq 1$.

Tehát akkor értelmezhető az egyenletben szereplő mindhárom kifejezés, ha $x\geq 10$.
Vizsgáljuk meg az egyenlet jobb és bal oldalának értékkészletét, ha $x\geq 10$.
A $\sqrt{x-10}$ szigorúan monoton növekvő. Akkor a legkisebb a helyettesítési értéke, ha $x=10$.
A $2-\sqrt{x-10}$ szigorúan monoton csökkenő, a legnagyobb helyettesítési érték 2, ha $x=10$.

A jobb oldal vizsgálata előtt bizonyítsuk be, hogy egy pozitív szám és a reciprokának összege legalább 2, azaz:

$$a+\frac{1}{a}\geq 2 \quad ha \;\; a>0$$

Szorozzuk meg az egyenlet mindkét oldalát a-val. Mivel a értéke pozitív, azért nem változik meg a reláció iránya.

$$a^2+1\geq 2a$$

$$a^2-2a+1\geq 0$$

$$(a-1)^2\geq 0$$

A kapott kifejezésre tényleg igaz a reláció. És az egyenlőség csak akkor állhat fenn, ha $a=1$.
Mivel csak ekvivalens átalakításokat végeztünk, ezért a bizonyítandó állítás is igaz.

Mivel a vizsgált egyenlet jobb oldalán is egy kifejezés és reciprokának összege áll, továbbá az lgx kifejezés pozitív (mert $x\geq 10$ számokra az lgx értéke pozitív), azért a jobb oldal értéke legalább 2. A 2 csak akkor lehet a jobb oldal helyettesítési értéke, ha $\lg x=1$, amiből $x=10$.

Tehát az egyenlet bal oldalának a legnagyobb helyettesítési értéke 2, amit akkor ér el, ha $x=10$. Az egyenlet jobb oldalának legkisebb helyettesítési értéke 2, amit akkor ér el, ha $x=10$.
Ebből következik, hogy az egyenlet egyetlen megoldása az $x=10$.

b) Alakítsuk szorzattá a számlálóban és nevezőben lévő kifejezéseket, majd végezzük el a lehetséges egyszerűsítéseket:

$$\frac{x^3-16x}{x^3-6x^2+8x}=\frac{x\cdot\left(x^2-16\right)}{x\cdot\left(x^2-6x+8\right)}=\frac{x\cdot(x-4)\cdot(x+4)}{x\cdot(x-4)\cdot(x-2)}=\frac{x+4}{x-2}\quad de\ \ x\neq 0;\ \ x\neq 4$$

Vizsgáljuk meg, hogy a leegyszerűsített kifejezés helyettesítési értéke x mely egész értékeinél lesz egész szám.

$$\frac{x+4}{x-2}=\frac{x-2+6}{x-2}=1+\frac{6}{x-2}$$

A kifejezés értéke akkor egész, ha az $(x-2)$ értéke 6-nak osztója. Foglaljuk táblázatba a lehetséges eseteket:

x-2	-6	-3	-2	-1	1	2	3	6
x	-4	-1	0	1	3	4	5	8

Mivel x értéke nem lehet 0 és 4, ezért x értékére hat lehetséges megoldás marad: -4; -1; 1; 3; 5; 8.